ФГБОУ ВО Казанский ГМУ Минздрава России

МЕДИКО-БИОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Зав. кафедрой, доцент

Гиматдинов Р.С.

____________________

**Билет №**

1. Несобственные интегралы. Несобственные интегралы 1-го рода. Несобственные интегралы 2-го рода.

2. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка.

3. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin^2 3x}{sin^2 2x}$$

4. Вычислить производную неявной функции:

$$x^2 + xy + y^2 = 6$$

| **Критерии оценивания результатов обучения** | | | |
|---|---|---|---|
| Результат не достигнут (менее 7 баллов) | Результат минимальный (7-8 баллов) | Результат средний (8-9 баллов) | Результат высокий (9-10 баллов) |
| Неудовлетворительный уровень способности выбирать соответствующий математический аппарат для решения и контроля правильности решения; представлена только формула без объяснений, нет задачи | Базовый уровень способности выбирать соответствующий математический аппарат для решения и контроля правильности решения; представлена формула закона и указаны величины, входящие в нее, есть формула для решения задачи | Средний уровень способности выбирать соответствующий математический аппарат для решения и контроля правильности решения; представлена формула закона, указаны величины, входящие в нее, единицы измерения величин. Нет анализа формулы, есть формула для решения задачи, решена задача | Высокий уровень способности выбирать соответствующий математический аппарат для решения и контроля правильности решения; представлена формула закона, указаны величины, входящие в нее, единицы измерения величин. Есть анализ формулы, решена задача, есть алгоритм решения типовых задач |

# Эталон ответа

**1. Несобственные интегралы. Несобственные интегралы 1-го рода. Несобственные интегралы 2-го рода.**

***Несобственные интегралы. Несобственный интеграл 1-го рода***

Определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называется собственным, если интервал интегрирования $[a,b]$ – конечный, а подынтегральная функция f(x) – непрерывная на отрезке $[a,b]$.

Определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называется несобственным интегралом 1-го рода, если функция f(x) – непрерывна на промежутке $a \leq x < +\infty$, при условии, что существует конечный предел

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Таким образом, если указанный предел существует, то несобственный интеграл сходится, если предел бесконечен (не существует), то такой интеграл расходится.

Аналогично:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx$$

Данный определенный интеграл сходится, если существуют пределы обоих интегралов.

***Несобственный интеграл второго рода***

Пусть функция $f(x)$ – непрерывна на отрезке $[a,b]$ и имеет точку разрыва при $x = b$. Тогда несобственный интеграл от разрывной функции определяется формулой

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

и называется сходящимся или расходящимся в зависимости от того, существует или не существует указанный предел.

**Пример:**

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_0^1 = 2 - 0 = 2$$

**2. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка.**

***Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижения порядка***

В общем случае дифференциальное уравнение 2-го порядка записывается в виде:

$$f(x, y, y', y'') = 0$$

или, если оно разрешено относительно второй производной, то в виде

$$y'' = f(x, y, y')$$

***Дифференциальное уравнение второго порядка, не содержащее искомой функции и ее производной***

Это уравнение вида

$$y'' = f(x)$$

Общее решение уравнения находится двухкратным интегрированием, последовательно понижая порядок уравнения на единицу.

***Дифференциальное уравнение второго порядка, не содержащее искомой функции***

Это уравнение вида

$$y'' = f(x,y')$$

Вводя замену $y' = z(x)$, получим уравнение первого порядка относительно $z$.

$$z' = f(x,z)$$

Если решение этого уравнения равно

$$z = \phi(x, C_1)$$

то общее решение уравнения находится интегрированием равенства

$$y' = z, \text{ т.е. } \frac{dy}{dx} = \varphi(x, C_1), dy = \varphi(x, C_1)dx$$

$$y = \int \varphi(x, C_1)dx + C_2$$

***Дифференциальное уравнение второго порядка,***
***не содержащее аргумента***

Это уравнение вида

$$y'' = f(y, y')$$

Для нахождения решения уравнения вводится новая переменная $y' = P(y)$. $P(y)$ – сложная функция, зависящая от x через y. В этом случае

$$y'' = P' = \frac{dP}{dx} = \frac{dP}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dP}{dy} \cdot P$$

и уравнение примет вид:

$$P \cdot \frac{dP}{dy} = f(y, P)$$

Решив полученное уравнение, найдем

$$P = \varphi(y, C_1) \text{ или } \frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1)$$

Общее решение уравнения получим, разделяя переменные и интегрируя уравнения

$$\frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = dx, \int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = \int dx, \int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2$$

**3. Вычислить предел функции:**

$$\lim_{x \to 0} \frac{sin^2 3x}{sin^2 2x}$$

Для вычисления данного задания используем 1-й замечательный предел:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin^2 3x}{sin^2 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\ \cdot \sin 3x}{\sin 2x\ \cdot \sin 2x}\cdot\frac{9x^2}{4x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}}{\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}}\cdot\frac{9x^2}{4x^2} = \frac{9}{4} = 2{,}25$$

**4. Вычислить производную неявной функции:**

$$x^2 + xy + y^2 = 6$$

Если функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $F(x,y) = 0$, то, дифференцируя данное уравнение по $x$, разрешаем затем полученное уравнение относительно $y'x$.

$$x^2 + xy + y^2 = 6$$

$$2x{\cdot}dx + y \cdot dx + x \cdot dy + 2ydy = 0$$

$$(2x + y)\, dx + (x + 2y)\, dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + y}{x + 2y}$$